

30. Find the explicit form of the first three harmonic oscillator eigenfunctions in position space.

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{k!}} (\hat{a}^\dagger)^k \phi_0(x) \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} + \frac{-i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p}$$

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)}$$

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \phi_0(x) - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \hat{p} \phi_0(x)$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{m^3\omega^3}{4\hbar^3\pi}\right)^{1/4} x e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)} - \frac{i(-i\hbar)}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \frac{\partial}{\partial x} \left( \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)} \right)$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)} + \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right) 2x e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)} \right)$$

$$\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} x \phi_0(x)$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{a}^\dagger \phi_1(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \hat{x} - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\partial}{\partial x} \right) x e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)}$$

$$\phi_2(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x^2 - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sqrt{\frac{(m\omega)^2}{(\hbar)^2}} x^2 \right) e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)}$$

$$\phi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left( \frac{m\omega}{\hbar} \sqrt{2} x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right) x^2}$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right) x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) \phi_0(x)$$